Feuille d'exercice Proba

Exercice 1
Si $\mathbb{P}(A) = 1/3$ et $\mathbb{P}(B^c) = 1/4$, est-ce que A et B peuvent être disjoints ?

Exercice 2
Montrer que si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B|A) = 1$. Combien vaut $\mathbb{P}(A|B)$?

Exercice 3
Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$

Exercice 4
On distribue r boules dans n urnes de façon uniforme (chaque boule est dans une urne donnée avec probabilité $1/n$, indépendamment des autres). On note N_n le nombre d'urnes vides. Calculez $\mathbb{E}(N_n)$ et $\mathrm{Var}(N_n)$.

Exercice 5
Montrez que les fonctions que les fonctions suivantes sont des fonctions de répartitions :
- $x \to \exp(-\exp(-x))$ sur $]-\infty, \infty[$
- $x \to (1 + \exp(-x))^{-1}$ sur $]-\infty, \infty[$
- $x \to (1 - \exp(-x))$ sur $]0, \infty[$

Exercice 6
Soit X une variable aléatoire continue avec densité de probabilité $f(x)$ et fonction de répartition $F(x)$. Pour un nombre fixé x_0 tel que $F(x_0) < 1$, on définit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/(1 - F(x_0)) & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que $g(x)$ est une densité de probabilité.

Exercice 7
Soit X une var continue de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ (c'est-à-dire que la densité s'écrit $f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x)\mathbf{1}_{x>0}$). Soit S une var discrète de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$ indépendante de X et la var $Y = XS$. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire la fonction de densité de Y.

Exercice 8
Soit X une var de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $U = e^{tX}$. Pour quelles valeurs de $a > 0$, la variable aléatoire $V = e^{aX^2}$ est-elle de carré intégrable ? Dans ce cas, calculer sa variance.

Exercice 9
Soit X une var de loi uniforme sur $]0, 1[$ et Y définie par $= 1_{]0,p[}(X)$ avec $p \in]0, 1[$. Determiner la loi de Y. Calculer $\mathbb{E}(XY)$. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 10
Un vecteur aléatoire (X, Y) est distribué uniformément sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$, c'est-à-dire que la probabilité jointe est $f_{X,Y}(x, y) = 1/4 \times \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)$. Déterminer la probabilité des événements suivants : $2X - Y \geq 0$, $X^2 + Y^2 \leq 1$

Exercice 11

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq Y)$

Exercice 12

Supposons que le couple (X, Y) suive une loi jointe de la forme $f_{X,Y}(x, y) = (x + y) \times \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$. Calculez les lois marginales de X et Y, l'espérance de ces deux variables, puis la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$. Les deux variables sont elles indépendantes ?

Exercice 13

On considère un vecteur $X = (X_1, X_2)$ de densité :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}} \times \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1)\mathbf{1}_{[0,x_1]}(x_2)$$

Calculer la densité marginale de X_1, de X_2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
Déterminer une densité conditionnelle de $X_2|X_1 = x_1$, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_2|X_1 = x_1)$. Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?

Exercice 14

Une truite pond des oeufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque oeuf survit avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres.

1. Soit M le nombre d'oeufs qui survivent. Donner la loi conjointe du couple (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M.
2. M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 15

Dans le bois de Vincennes, on modélise le diamètre d'un arbre par une variable aléatoire X, et sa hauteur par une autre variable aléatoire Y . La loi jointe de X et Y est donnée par la densité : $f_{X,Y}(x, y) = 1/4(x + y)e^{-y}$ pour $y \geq 0, 0 \leq x \leq 2$.
1. Donner la densité marginale de X.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
4. L'âge d'un arbre est donné par $W = 12XY$. Calculer $\mathbb{E}[W]$.

Exercice 16

Soient X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique de paramètre θ. Donner la loi de $X + Y$.

Exercice 17

Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. admettant la densité de probabilité suivante

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2),$$

Trouver les densités marginales de X_1 et X_2. A quelle condition les v.a. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?