

Feuille d'exercice Optimisation

Exercice 1

Déterminez le gradient et la Hessienne des fonctions suivantes sur l'ensemble où elles sont différentiables :

- $f : (x, y) \rightarrow x^2 + \sqrt{y}$
- $f : (x, y) \rightarrow \sqrt{xy}$
- $f : (x, y) \rightarrow x^2y^2$
- $f : (x, y, z) \rightarrow xy + yz + zx$

Exercice 2

Trouvez les extrema locaux de

$$f : (x, y) \rightarrow \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

Ces extrema sont-ils globaux ?

Exercice 3

Même question pour $f : (x, y) \rightarrow x^3 + y^3 - 3xy$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f : (x, y) \rightarrow x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Montrez que le problème $\min f(x, y)$ sur \mathbb{R}^2 a au moins une solution. Résoudre le problème de minimisation.

Exercice 5

Résoudre les problèmes suivants :

- $\max \{x + 2xy + 2y - (x^2 + y^2)/2 \text{ s.c. } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
- $\min \{x^3 + y^2 \text{ s.c. } x^2 + y^2 \leq 5/4, 2x + y + 5/4 \geq 0\}$
- $\max \{xy - x^2 - y^2 \text{ s.c. } 2x + y \geq 5, y \geq 3\}$